1 Analyse von Kontingenztafeln: Grundlagen

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim Po(\lambda)$.

(a) Berechnen Sie $E(X)$.

(b) Berechnen Sie $Var(X)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine multinomialverteilter Zufallsvektor $\boldsymbol{X} \sim M(n, \boldsymbol{\pi})$ mit $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_k)^T$.

(a) Berechnen Sie $E(\boldsymbol{X})$.

(b) Berechnen Sie $cov(\boldsymbol{X})$.

Aufgabe 3

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Poisson-Verteilung und Multinomialverteilung?

Aufgabe 4

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Multinomialverteilung und Produkt-Multinomialverteilung?

Aufgabe 5

Gegeben sei eine zweidimensionale $(I \times J)$-Kontingenztafel für zwei Variablen $X_A \in \{1, \ldots, I\}$ und $X_B \in \{1, \ldots, J\}$:

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & & & X_B & & & \\
 & & 1 & \ldots & j & \ldots & J & \\
\hline
 & 1 & X_{11} & \ldots & X_{1j} & \ldots & X_{1J} & X_{1+} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
X_A & i & X_{i1} & \ldots & X_{ij} & \ldots & X_{iJ} & X_{i+} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & I & X_{I1} & \ldots & X_{Ij} & \ldots & X_{IJ} & X_{I+} \\
\hline
 & & X_{+1} & \ldots & X_{+j} & \ldots & X_{+J} & X_{++}
\end{array}
$$

Dabei bezeichne X_{ij} die Anzahl der Beobachtungen in der Zelle (i, j).
Des Weiteren gelte

$$\mu_{ij} = E(X_{ij}), \quad \mu_{i+} = \sum_{j=1}^{J} \mu_{ij}, \quad \mu_{+j} = \sum_{i=1}^{I} \mu_{ij}, \quad \mu_{++} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \mu_{ij}$$

für alle $i = 1, \ldots, I$ und $j = 1, \ldots, J$.

Zeigen Sie, dass für $(I \times J)$-Kontingenztafeln die Hypothese

$$H_0: \quad \mu_{ij} = \frac{\mu_{i+}\mu_{+j}}{\mu_{++}}, \qquad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J,$$

(a) im Multinomial-Erhebungsschema äquivalent zur Unabhängigkeitshypothese ist,

(b) im Produkt-Multinomial-Erhebungsschema äquivalent zur Homogenitätshypothese ist,

(c) im Poisson-Erhebungsschema äquivalent dazu ist, dass keine Wechselwirkungen zwischen den beiden Faktoren bestehen.