

1 Analyse von Kontingenztafeln: Das loglineare Modell

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass für $(I \times J)$ -Kontingenztafeln die Hypothese

$$H_0: \mu_{ij} = \frac{\mu_{i+}\mu_{+j}}{\mu_{++}}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J,$$

äquivalent zum loglinearen Unabhängigkeitsmodell

$$\tilde{H}_0: \log(\mu_{ij}) = \lambda + \lambda_{A(i)} + \lambda_{B(j)}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J,$$

mit den Restriktionen

$$\sum_{i=1}^I \lambda_{A(i)} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^J \lambda_{B(j)} = 0$$

ist.

Aufgabe 7

Gegeben sei eine $(I \times J)$ -Kontingenztafel.

- (a) Bestimmen Sie für die drei Erhebungsschemata (Poisson-, Multinomial- bzw. Produktmultinomialerhebungsschema) die Anzahl freier Parameter!

Das zweidimensionale loglineare Modell für eine $(I \times J)$ -Kontingenztafel hat allgemein folgende Form:

$$\log(\mu_{ij}) = \lambda + \lambda_{A(i)} + \lambda_{B(j)} + \lambda_{AB(ij)}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

- (b) Erklären Sie, warum Restriktionen für die Parameter notwendig sind!
- (c) Geben Sie zwei verschiedene Restriktionsarten an!
- (d) Kann man das loglineare Modell als Regressionsmodell auffassen?

Aufgabe 8

Gegeben sei eine zweidimensionale $(I \times J)$ -Kontingenztafel mit den erwarteten Häufigkeiten $\mu_{ij} = E(X_{ij})$.

- (a) Zeigen Sie, dass sich jedes der drei Erhebungsschemata (Poisson-, Multinomial- bzw. Produktmultinomialerhebungsschema) auf die Gestalt einer Exponentialfamilie bringen lässt:

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) = c(\mathbf{x}) \cdot a(\boldsymbol{\mu}) \cdot \exp(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{T}(\mathbf{x})),$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{IJ})^T$ die Zellobserverungen und $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu})$ den natürlichen Parameter in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{11}, \dots, \mu_{IJ})^T$.

- (b) Zeigen Sie ausgehend von (a), dass auch in der Parametrisierung eines zweidimensionalen loglinearen Modells $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_{A(1)}, \dots, \lambda_{A(I)}, \lambda_{B(1)}, \dots, \lambda_{B(J)}, \lambda_{AB(11)}, \dots, \lambda_{AB(IJ)})^T$ unter Beachtung der entsprechenden Restriktionen eine Exponentialfamilie vorliegt.

Aufgabe 9

Gegeben sei eine (2×2) -Kontingenztafel:

		X_B		
		1	2	
X_A	1	X_{11}	X_{12}	X_{1+}
	2	X_{21}	X_{22}	X_{2+}
		X_{+1}	X_{+2}	X_{++}

- (a) Zeigen Sie, dass der *Odds Ratio* invariant ist gegenüber
- (i) einer inhaltlichen Vertauschung der Variablen X_A und X_B ,
 - (ii) der Multiplikation von Zeilen- oder Spaltenhäufigkeiten mit einer Konstanten (ungleich Null).
- (b) Zeigen Sie, dass die *Differenz von Anteilen* und das *Relative Risiko* obige Invarianzeigenschaften nicht haben.